Práctica 6
Geometría Proyectiva

1. Demostrar que las siguientes transformaciones preservan razon doble
   - rotohomotecia con centro, angulo y razon arbitrarios,
   - inversion con centro y radio arbitrarios,
   - proyeccion de una recta ℓ a una recta ℓ' por un punto exterior a ℓ y ℓ',
   - proyeccion de una circunferencia ω a una recta ℓ por un punto en ω pero no en ℓ,
   - proyeccion de una circunferencia ω en si misma por un punto que no este en ω.
2. Dado un triangulo ABC sean M y D los pies de la mediana y la bisectriz por A en BC. La perpendicular a la recta AD desde D interseca a AB, AM y AC en P, Q y R respectivamente. Probar que $CD/DB = PQ/QR$.
3. Un cuadrilátero $ABCD$ es *armónico* si $(A, C; B, D) = -1$, luego
   - Dado un triangulo ABC sean D, E y F en BC, AC y AB tales que las tres cevianas correspondientes concurren y definamos a G como la interseccion de la recta BC con EF. Probar que $BECF$ es armonico.
   - Dado un triangulo ABC, sean D y E las intersecciones de BC con la bisectriz interior y la bisectriz exterior por A respectivamente. Probar que $BDCE$ es armonico.
   - Una recta por un punto P intersecta a una circunferencia en puntos A y B y a su recta polar respecto de la misma circunferencia en un punto Q. Probar que $APBQ$ es armonico.
   - Una recta por un punto P intersecta a una circunferencia en A y B. Definamos ademas X e Y como las intersecciones de las tangentes por P a la circunferencia. Probar que $AXBY$ es armonico.
4. Sea $ABCD$ armónico inscrito en una circunferencia. Probar que BD y las tangentes por A y C concurren.
5. Si $ABCD$ es tal que una circunferencia es tangente a AB, BC, CD y DA en P, Q, R y S respectivamente, demostrar que AB, CD y QS son concurrentes si y solo si BC, DA y PR son concurrentes.
6. Sea ABC isoceles con base AC. Si P es la interseccion de las tangentes por A y B a la circunferencia circunscripta y D es la otra interseccion de PC con la circunscripta entonces AQ corta a PB en su punto medio.
7. Sean ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 tres rectas paralelas y ℓ'_1, ℓ'_2 y ℓ'_3 otras tres rectas paralelas. Demostrar que si p_{ij} denota la interseccion de las rectas ℓ_i con ℓ'_j entonces las tres rectas $p_{23}p_{32}, p_{31}p_{13}$ y $p_{12}p_{21}$ concurren.

   Sugerencia: Usar el dual del teorema de Pappus.
8. Sean ABC y $A'B'C'$ triangulos perspectivos desde un punto. Demostrar que si definimos los siguientes puntos de interseccion
   $$A'' = BC' \cap CB', \; B'' = CA' \cap AC' \text{ y } C'' = AB' \cap BA'$$
   entonces $A'A'', B'B''$ y $C'C''$ son concurrentes.

   Sugerencia: Usar el teorema de Desargues para probar que $AB, A'B'$ y $A''B''$ son concurrentes.
9. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con E en BC y F en AD, si $P = AE \cap BD$ y $Q = AC \cap BF$ probar que las rectas CD, EF y PQ tienen un punto en comun.

   Sugerencia: Usar el teorema de Desargues y el teorema de Pappus.
10. Dado un triangulo ABC consideremos una circunferencia tangente al lado AB en X, al lado AC en Y y a la circunferencia circunscrita de ABC. Demostrar que el incentro de ABC esta en la recta XY.

    Sugerencia: Usar el teorema de Pascal.